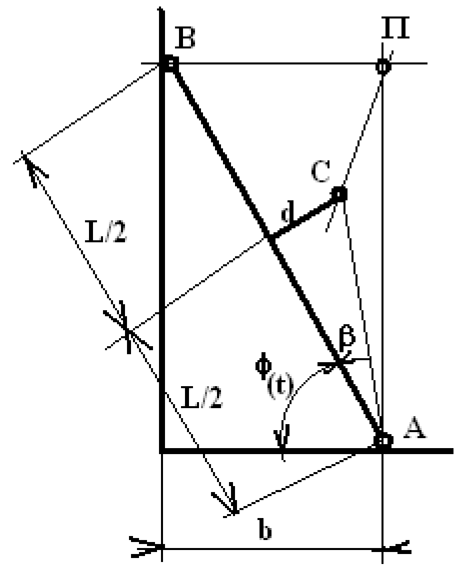
EL_DYN I_06a_m

KPT7a.mcd

Tyč tvaru dle obrázku se pohybuje v rohu svislé stěny tak, že bod **A** se od rohu vzdaluje s konstantním zrychlením $\mathbf{a_A}$, Počáteční rychlost bodu **A** je nulová. Bod **B** klesá svisle dolů. Počáteční poloha tyče je svislá s bodem **A** právě v rohu a bodem **B** ve výšce **L** na rohem. Určete rychlost $\mathbf{v_B}$ a zrychlení $\mathbf{a_B}$ bodu **B** v okamžiku, kdy bod **A** narazí na zarážku ve vzdálenosti **b** od rohu. Dále určete rychlost $\mathbf{v_C}$ a zrychlení $\mathbf{a_C}$ bodu **C v** témže okamžiku**.** Bod **C** je koncovým bodem návarku na tyči (viz.obr.).



Dáno: $aA := 1.2 \cdot m \cdot s^{-2}$ $L := 2.2 \cdot m$

$b := 1.2 \cdot m$ $d := 0.2 \cdot m$

1.) Řešení rychlostí - okmažitý pól pohybu π

$\phi := \mathrm{acos}\left(\frac{b}{L}\right)$ $\phi = 56.944\,deg$ $\beta := \mathrm{atan}\left[\frac{d}{\left(\frac{L}{2}\right)}\right]$

$\delta := \phi + \beta$ $\frac{\delta}{deg} = 67.249$ $\beta = 10.305\,deg$

$\pi B := L \cdot \cos(\!($ $\pi B = 1.2\,m$

$\pi A := L \cdot \sin(\!($ $\pi A = 1.844\,m$

$AC := \sqrt{d^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}$ $AC = 1.118\,m$

$\pi C := \sqrt{(AC \cdot \cos(\delta))^2 + (\pi A - AC \cdot \sin(\delta))^2}$

$\pi C = 0.921\,m$

Bod **A** se pohybuje pohybem rovnoměrně zrychleným - výpočet času **t**, kdy se bod **A** dostane do vzdálenosti **b** z počáteční polohy

$b = \frac{1}{2} \cdot aA \cdot t^2$ $t := \sqrt{\frac{b \cdot 2}{aA}}$ $t = 1.414\,sec$

Rychlost bodu **A** v daném okamžiku

$vA := aA \cdot t$ $vA = 1.697\,m\,sec^{-1}$

$\omega\pi := \frac{vA}{\pi A}$ $\omega\pi = 0.92\,sec^{-1}$ Úhlová rychlost otáčení kolem okamžitého polu pohybu **π**

$vB := \omega\pi \cdot \pi B$ $vB = 1.104\,m\,sec^{-1}$

$vC := \omega\pi \cdot \pi C$ $vC = 0.847\,m\,sec^{-1}$ Rychlost bodu **C** v daném okamžiku

Pozn. Tímto způsobem lze určit pouze rychlosti !!!!!

2) Řešení pohybu základním rozkladem pohybu

Rychlosti

$\overline{vB} = \overline{vA} + \overline{vBA}$ rozepsání vektorové rovnice do rovnic skalárních

$0 = vA - vBA \cdot \sin(\phi)$ $vBA := \dfrac{vA}{\sin(\phi)}$ $vBA = 2.025\,m\,sec^{-1}$ Směr osy X

$vB = vBA \cdot \cos(\phi)$ $vB := vBA \cdot \cos(\phi$ $vB = 1.104\,m\,sec^{-1}$ Směr osy Y

$vC = vA + vCA$ $vCA := \dfrac{vBA}{L} \cdot AC$ $vCA = 1.029\,m\,sec^{-1}$

$vCx := vA - vCA \cdot \sin(\delta)$

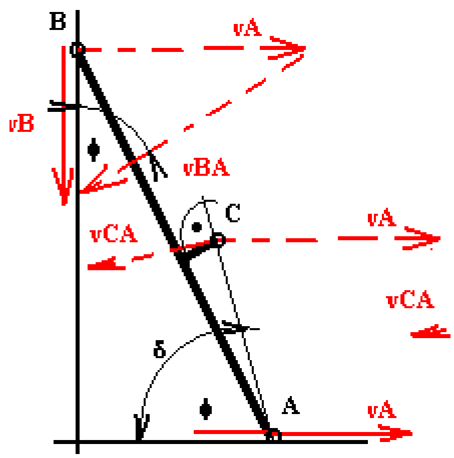
$vCy := vCA \cdot \cos(\delta)$

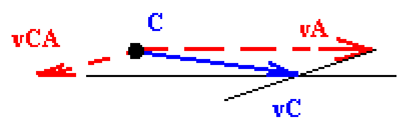
$vCx = 0.748\,m\,sec^{-1}$

$vCy = 0.398\,m\,sec^{-1}$

$vC := \sqrt{vCx^2 + vCy^2}$

$vC = 0.847\,m\,sec^{-1}$





Zrychlení

$\overline{aB} = \overline{aA} + \overline{aBn} + \overline{aBt}$ rozepsání vektorové rovnice do rovnice skalárních

$0 = aA - aBAt \cdot \sin(\phi) + aBAn \cdot \cos(\phi)$ $aBAn := \dfrac{vBA^2}{L}$ $aBAn = 1.864\,m\,sec^{-2}$

$aB = 0 + aBAt \cdot \cos(\phi) + aBAn \cdot \sin(\phi)$

$aBAt := \dfrac{aA + aBAn \cdot \cos(\phi}{\sin(\phi)}$ $aBAt = 2.645\,m\,sec^{-2}$

$aB := 0 + aBAt \cdot \cos(\phi) + aBAn \cdot \sin(\phi)$

$aB = 3.004\,m\,sec^{-2}$

$aC = aA + aCAt + aCAn$

$aCAt := \dfrac{aBAt}{L} \cdot AC$ $aCAt = 1.344\,m\,sec^{-2}$

$aCAn := \dfrac{vCA^2}{AC}$ $aCAn = 0.947\,m\,sec^{-2}$

$aCx := aA + aCAn \cdot \cos(\delta) - aCAt \cdot \sin(\delta)$

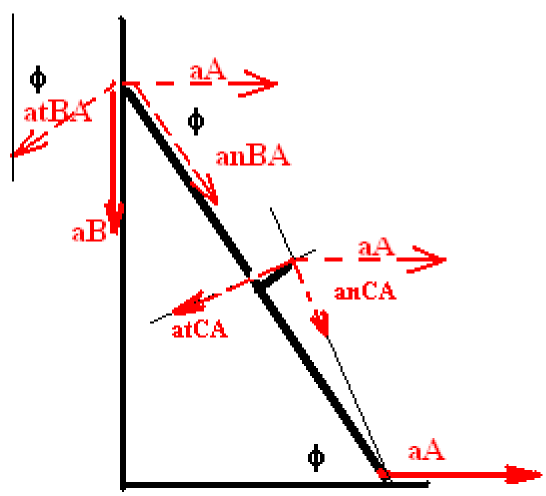
$aCy := aCAn \cdot \sin(\delta) + aCAt \cdot \cos(\delta)$

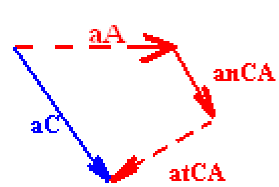
$aC := \sqrt{aCx^2 + aCy^2}$

$aCx = 0.327\,m\,sec^{-2}$

$aCy = 1.393\,m\,sec^{-2}$

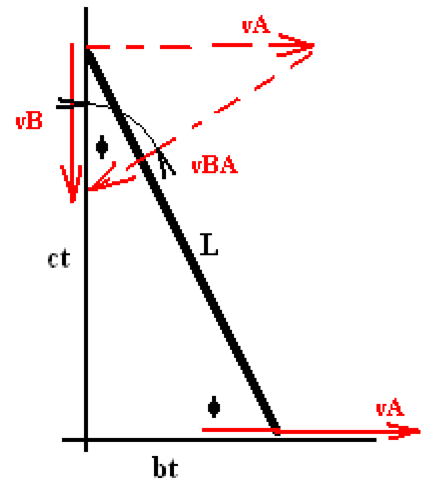
$aC = 1.431\,m\,sec^{-2}$





3.) Analytické řešení

Bod B



$$L^2 = ct^2 + bt^2$$

$$ct = \sqrt{L^2 - bt^2} \qquad bt = \frac{1}{2}\cdot aA\cdot t^2$$

$$\frac{d}{dt}ct = vB = \frac{d}{dt}\cdot\sqrt{L^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot aA\cdot t^2\right)^2}$$ rychlost bodu B

$t = 1.414\,sec$

$$vB := \frac{-1}{2\cdot\left(L^2 - \frac{1}{4}\cdot aA^2\cdot t^4\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot aA^2\cdot t^3$$

$vB = -1.104\,m\,sec^{-1}$

$$aB = \frac{d}{dt}vB$$

$$aB := \frac{-1}{4\cdot\left(L^2 - \frac{1}{4}\cdot aA^2\cdot t^4\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot aA^4\cdot t^6 - \frac{3}{2\cdot\left(L^2 - \frac{1}{4}\cdot aA^2\cdot t^4\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot aA^2\cdot t^2$$

$aB = -3.004\,m\,sec^{-2}$

Další možné řešení:

$$\phi(t) = acos\left(\frac{aA\cdot t^2}{2\cdot L}\right) \quad yB(t) = L\cdot sin(\phi(t)) = L\cdot sin\left(acos\left(\frac{aA\cdot t^2}{2\cdot L}\right)\right)$$

$$yB(t) = L\cdot sin(\phi(t))$$

$$vB = \frac{d}{dt}yB(t)$$

$$vB = \frac{d}{dt}\cdot\left(L\cdot sin\left(acos\left(\frac{aA\cdot t^2}{2\cdot L}\right)\right)\right)$$

$t = 1.414\,sec$

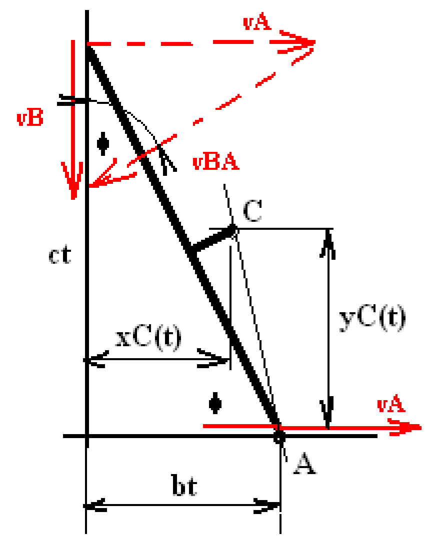
$$vB := \frac{-1}{L\cdot\left(4 - aA^2\cdot\frac{t^4}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot aA^2\cdot t^3 \qquad vB = -1.104\,m\,sec^{-1}$$

Pozn: y-souřadnice bodu **B** se zmenšuje, tzn. rychlost má znamén] —

Bod C - je nutno obecně určit rovnici pro výpočet souřadnice **xC(t)** a **yC(t)** bodu **C** v závislosti n čase

$$b(t) = \frac{1}{2}\cdot aA\cdot t^2$$

$$CA := \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + d^2}$$



$$\phi = \operatorname{arcos}\left(\frac{b(t)}{L}\right) = \operatorname{arcos}\left(\frac{\frac{1}{2}}{L}\cdot aA\cdot t^2\right)$$

$$xC(t) = b(t) - CA\cdot\cos(\phi(t) + \beta)$$ X souřadnice bodu **C**

$$xC(t) = \frac{1}{2}\cdot aA\cdot t^2 - CA\cdot\cos\left(\operatorname{acos}\left(\frac{\frac{1}{2}}{L}\cdot aA\cdot t^2\right) + \beta\right)$$

$$yC(t) = CA\cdot\sin(\phi + \delta)$$ Y souřadnice bodu **C**

$$yC(t) = CA\cdot\sin\left(\operatorname{acos}\left(\frac{\frac{1}{2}}{L}\cdot aA\cdot t^2\right) + \beta\right)$$

Rychlost bodu **C**

$$vCx = \frac{d}{dt}xC(t)$$ Rychlost ve směru osy X

$$vCx := aA\cdot t - 2\cdot CA\cdot\frac{\sin\left(\operatorname{acos}\left(\frac{1}{2\cdot L}\cdot aA\cdot t^2\right) + \beta\right)}{L}\cdot aA\cdot\frac{t}{\left(4 - \frac{1}{L^2}\cdot aA^2\cdot t^4\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$vCx = 0.748\,m\,sec^{-1}$$

$$vCy = \frac{d}{dt}yC(t)$$ ychlost ve směru osy X

$$vCy := -2\cdot CA\cdot\frac{\cos\left(\operatorname{acos}\left(\frac{1}{2\cdot L}\cdot aA\cdot t^2\right)+\beta\right)}{L}\cdot aA\cdot\frac{t}{\left(4-\frac{1}{L^2}\cdot aA^2\cdot t^4\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$vCy = -0.398\,m\,sec^{-1}$

$$vC := \sqrt{vCx^2+vCy^2}$$

$vC = 0.847\,m\,sec^{-1}$

Zrzchlení bodu **C**

$$aCx = \frac{d}{dt}vxC(t)$$

$$aCx := \frac{d}{dt}\left[aA\cdot t-2\cdot CA\cdot\frac{\sin\left(\operatorname{acos}\left(\frac{1}{2\cdot L}\cdot aA\cdot t^2\right)+\beta\right)}{L}\cdot aA\cdot\frac{t}{\left(4-\frac{1}{L^2}\cdot aA^2\cdot t^4\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$aCx = 0.327\,m\,sec^{-2}$

$$aCy = \frac{d}{dt}vyC(t)$$

$$aCy := \frac{d}{dt}-2\cdot CA\cdot\frac{\cos\left(\operatorname{acos}\left(\frac{1}{2\cdot L}\cdot aA\cdot t^2\right)+\beta\right)}{L}\cdot aA\cdot\frac{t}{\left(4-\frac{1}{L^2}\cdot aA^2\cdot t^4\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$aCy = -1.393\,m\,sec^{-2}$

$$aC := \sqrt{aCx^2+aCy^2}$$

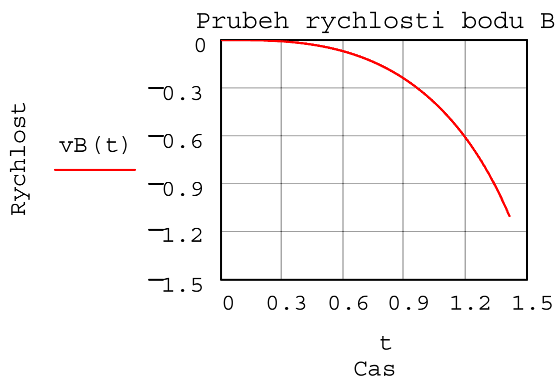
$aC = 1.431\,m\,sec^{-2}$

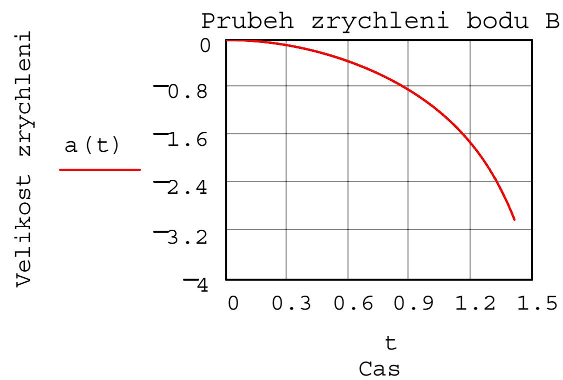
Průběhy rychlostí a zrychlení bodu B v závislosti na čase

$t := 0\cdot s, 0.001\cdot s .. t$

$$vB(t) := \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{L^2-\left(\frac{1}{2}\cdot aA\cdot t^2\right)^2}}\cdot\left[-2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot aA\cdot t^2\right)\right]\cdot aA\cdot t$$

$$a(t) := \frac{-2}{\left(4\cdot L^2 - aA^2\cdot t^4\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}\cdot aA^4\cdot t^6 - \frac{3}{\sqrt{4\cdot L^2 - aA^2\cdot t^4}}\cdot aA^2\cdot t^2$$



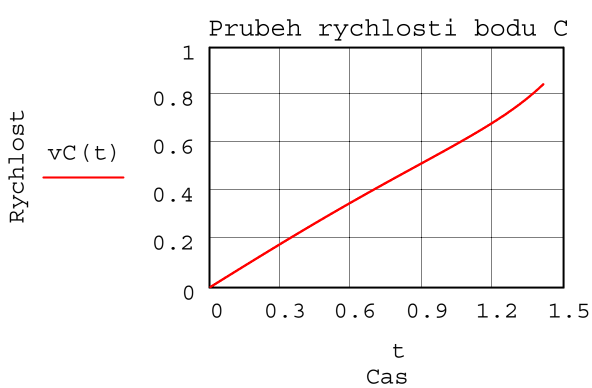


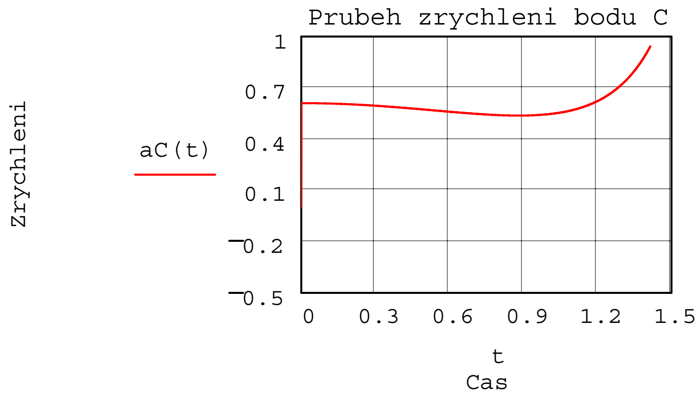
Průběhy rychlostí a zrychlení bodu C v závislosti na čase

$$xC(t) := \frac{1}{2}\cdot aA\cdot t^2 - CA\cdot \cos\left(\operatorname{acos}\left(\frac{\frac{1}{2}}{L}\cdot aA\cdot t^2\right) + \beta\right)$$

$$yC(t) := CA\cdot \sin\left(\operatorname{acos}\left(\frac{\frac{1}{2}}{L}\cdot aA\cdot t^2\right) + \beta\right)$$

$$vC(t) := \sqrt{\left(\frac{d}{dt}xC(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}yC(t)\right)^2} \qquad aC(t) := \frac{d}{dt}vC(t)$$




Prubeh zrychleni bodu C
Zrychleni
aC(t)
1
0.7
0.4
0.1
−0.2
−0.5
0
0.3
0.6
0.9
1.2
1.5
t
Cas